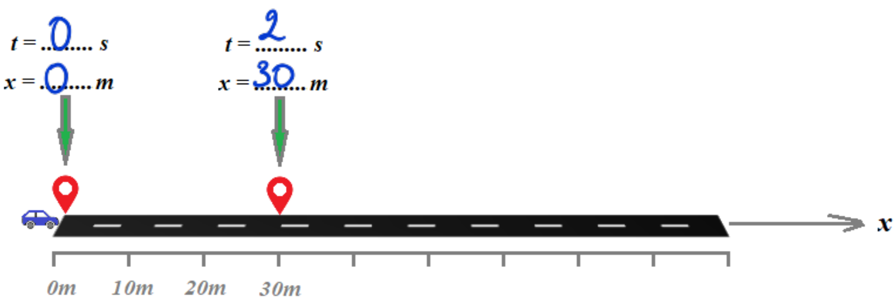
Les dérivées

I – Rôle de la dérivée en mathématiques

1) Signification

La dérivée donne les variations d'une quantité : si un nombre y varie en fonction de x, on notera y' la dérivée.

2) Des exemples



<u>Exemple 1</u> : la Vitesse

La voiture parcourt 30 m en 2 s.

x est la position

t est le temps

x varie de 30 m en 2 s

la vitesse est donc de $\frac{30}{2} = 15$ m/s. La Vitesse est bien de combien varie x en fonction du temps.

En physique on écrit que v, la vitesse est la dérivée de x la position, donc $v = x'$

<u>Exemple 2</u> : la maximum d'une fonction

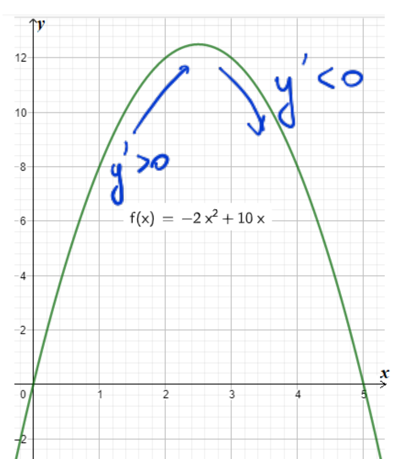
y augmente puis diminue quand x augmente

La dérivée de y représente les variations de y en fonction de x.

- quand y augmente y' est positive
- quand y diminue y' est négative

variation positive → augmentation

variation négative → diminution

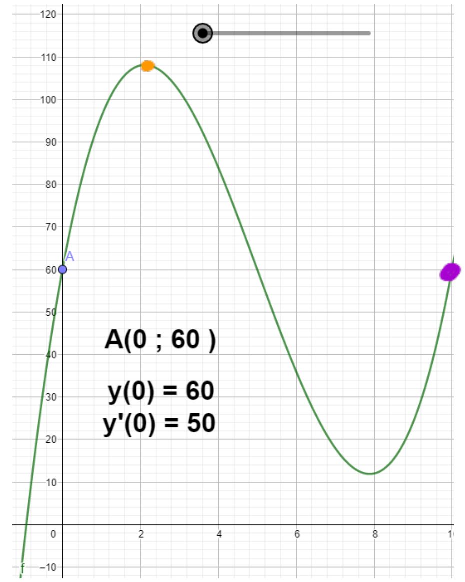


y' : variations

C'est quand y' passe de valeurs positives à négatives qu'on a un maximum !

I – Nombre dérivé et fonction dérivée

1) Nombre dérivé



En déplaçant le point A on note :

- Son abscisse : x
- Son ordonnée : y
- Le nombre dérivé en A : y'

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	60	96	108	102	84	60	36	18	12	24	60
y'	50	23	2	-13	-22	-25	-22	-13	2	23	50

courbe : croissante décroissante croissante

2) Remarques

Le nombre dérivé indique l'inclinaison de la courbe (la pente)
Plus la valeur est importante plus l'inclinaison est forte.

Quand la courbe est croissante,
le nombre dérivé est positif : $y' = 50$: forte pente montante

Quand la courbe est décroissante,
le nombre dérivé est négatif $y' = -13$ faible pente descendante

La fonction dérivée est la fonction qui donne la pente pour
chaque valeur de x

Ex : pour $x = 5$ $y'(5) = -25$
pour $x = 6$ $y'(6) = -22$
⋮

II – Calcul d'une fonction dérivée

1) Pourquoi ?

On obtient la fonciton dérivée ***f'*** à partir de la formule de la fonction ***f***.

On disposera alors d'une formule qui permettra de calculer la pente de la courbe pour chaque valeur de x.

2) Comment ?

On utilise un tableau de dérivées (en voici un extrait) :

<u>On applique la méthode</u> :

- La dérivée d'une somme est la somme des dérivées
- On dérive chaque terme "comme dans le tableau"

	Fonction f	Dérivée f'
	$f(x)$	$f'(x)$
3 →	a	0
2 →	ax	a
1 →	x^2	$2x$
	x^3	$3x^2$

<u>Exemples</u> : 3 termes

a) Dériver $f(x) = 2x^2 + 10x + 12$

1 $2x^2$: $2\times x^2 \to 2\times 2x$ dérivé : $4x$

2 $\underbrace{10}_{a}x$: $ax \to a$ +

$10x \to 10$ dérivé : 10

3 $\underbrace{12}_{a}$: $a \to 0$ +

$12 \to 0$ dérivé : 0

conclusion

$f'(x) = 4x + 10$

b) Dériver $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$

$5\times x^2 \to 5\times 2x = 10x$

$-4x \to -4$

$+3 \to 0$

donc $f'(x) = 10x - 4$.

III – Sens de variations d'une fonction

1) Pourquoi ?

On utilise le signe de la dérivée ***f'***

Propriété :

Lorsque la dérivée ***f'*** en x est positive : la fonction est croissante

Lorsque la dérivée ***f'*** en x est négative : la fonction est décroissante

Lorsque la dérivée ***f'*** en x est nulle : la fonction passe par un "à plat"

2) Comment ?

Exemple : $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$

a) On dérive

$f'(x) = 10x - 4$

b) On résout $f'(x) = 0$ (pour savoir quand la courbe passe "à plat")

$10x - 4 = 0$

$10x = 4$

$x = \frac{4}{10}$

$x = 0,4$

c) On ajoute une ligne au tableau de variations

avant 0,4, exemple $x = 0$

$f'(0) = 10 \times 0 - 4 = -4 < 0$

après 0,4, exemple $x = 1$

$f'(1) = 10 \times 1 - 4 = 6 > 0$

x		0,4	
signe de f'(x)	−	*0*	+
f(x)	↘	2,2	↗

en $x = 0,4$ la courbe présente donc un minimum qui vaut $5 \times 0,4^2 - 4 \times 0,4 + 3 = 2,2$