Exercices polynômes de degré 3

Exercice 1 :

Voici un polynôme :

$$y = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$$

x ∈ [-3 ; 4]

1) Déterminer les racines de y = 0

Numworks : $x_1 = -2$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = 3$

2) Résoudre y = 5

$y = 5 \Rightarrow 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 5$

$\qquad\qquad\qquad\qquad -5 \quad -5$

$2x^3 - 4x^2 - 10x + 7 = 0 \leftarrow$ On cherche donc les racines de ce polynôme

Numworks : $x_1 \simeq 1,82$ $\quad x_2 \simeq 0,6$ $\quad x_3 \simeq 3,22$

3) Calculer la fonction dérivée

$y' = 6x^2 - 8x - 10$

Les racines sont les valeurs de x qui rendent y' nulle

4) Utiliser le résultat précédent pour dresser un tableau de variation et indiquer s'il y a un ou plusieurs extremums, préciser alors pour quelle valeur de x et la valeur de chaque extremum.

Racines de $6x^2 - 8x - 10$: $x_1 \simeq -0,79$ $\quad x_2 \simeq 2,12$

x		−0,79		2,12	
signe de V'	+	0	−	0	+
V	↗		↘		↗

$y'(-1) = 6\times(-1)^2 - 8\times(-1) - 10 = 4 > 0$

$y'(0) = 6\times 0^2 - 8\times 0 - 10 = -10 < 0$

$y'(3) = 6\times 3^2 - 8\times 3 - 10 = 20 > 0$

Il y a un maximum en $x = -0,79$ qui vaut :

$y(-0,79) = 2\times(-0,79)^3 - 4\times(-0,79)^2 - 10\times(-0,79) + 12 \simeq 16,42$

Il y a un minimum en $x = 2,12$ qui vaut :

$y(2,12) = 2\times 2,12^3 - 4\times 2,12^2 - 10\times 2,12 + 12 \simeq -8,12$

Exercice 2:

Voici un polynôme :

$$y = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

x ∈ [-5 ; 3]

1) Déterminer les racines de y = 0

(Numworks) : $x_1 = -4$ $x_2 = -1$ $x_3 = 2$

2) Résoudre y = 6

$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 6 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x - 14 = 0$

on cherche les racines de $x^3 + 3x^2 - 6x - 14$

(Numworks) : $x_1 \simeq -3,58$ $x_2 \simeq -1,71$ $x_3 \simeq 2,29$

3) Calculer la fonction dérivée

$y' = 3x^2 + 6x - 6$

4) Utiliser le résultat précédent pour dresser un tableau de variation et indiquer s'il y a un ou plusieurs extremums, préciser alors pour quelle valeur de x et la valeur de chaque extremum.

Racines de $3x^2 + 6x - 6$: $x_1 \simeq -2,73$ $x_2 \simeq 0,73$

x		-2,73		0,73	
signe de V'	+	0	−	0	+
V	↗		↘		↗

$y'(-3) = 3\times(-3)^2 + 6\times(-3) - 6 = 3 > 0$

$y'(0) = 3\times 0^2 + 6\times 0 - 6 = -6 < 0$

$y'(1) = 3\times 1^2 + 6\times 1 - 6 = 3 > 0$

Il y a un maximum en $x = -2,73$ qui vaut

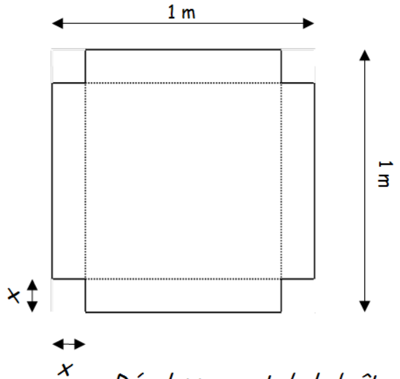
$y(-2,73) = (-2,73)^3 + 2\times(-2,73)^2 - 6\times(-2,73) - 8 \simeq 10,39$

Il y a un minimum en $x = 0,73$ qui vaut

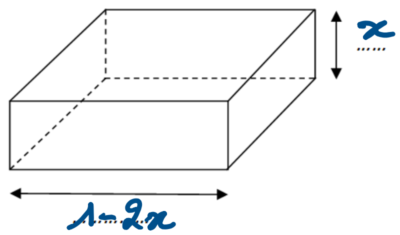
$y(0,73) = (0,73)^3 + 2\times(0,73)^2 - 6\times(0,73) - 8 \simeq -10,39$

Exercice 3:

Pour fabriquer une boîte à partir d'une plaque carrée de côté 1 m, on découpe aux 4 sommets un carré de côté x.



Développement de la boîte.



Vue de la boîte en perspective cavalière.

Volume = hauteur x largeur x longueur

1 – Montrer que $\boldsymbol{V = 4x^3 - 4x^2 + x}$

$V = x(1-2x)(1-2x)$

$V = x(1 - 2x - 2x + 4x^2)$

$V = x(4x^2 - 4x + 1)$

$V = 4x^3 - 4x^2 + x$

2 – Déterminer pour quelle valeur de x le volume V sera maximum.

$V' = 12x^2 - 8x + 1$ racines de V' : $x_1 \simeq 0{,}17$ $x_2 = 0{,}5$

x		0,17		0,5	
signe de V'	+	0	−	0	+
V	↗		↘		↗

valeur maxi que peut atteindre x

$V'(0) = 1 > 0$

$V'(0{,}2) = 12 \times 0{,}2^2 - 8 \times 0{,}2 + 1 = -0{,}12 < 0$

$V'(1) = 12 \times 1^2 - 8 \times 1 + 1 = 5 > 0$

le volume maximum est atteint pour $x = 0{,}17$ m et vaut :

$V(0{,}17) = 4 \times 0{,}17^3 - 4 \times 0{,}17^2 + 0{,}17 = 0{,}074 \text{ m}^3$

Pour une hauteur de 17 cm le volume maxi est de 74 L.

Exercice 4 :

Voici un polynôme :

$$y = 2x^3 + 6x^2 - 26x - 30$$

x ∈ [-6 ; 4]

1) Déterminer les racines de y = 0

$x_1 = -5 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 3$

2) Résoudre y = 20

$2x^3 + 6x^2 - 26x - 30 = 20 \Rightarrow 2x^3 + 6x^2 - 26x - 50 = 0$

$-20 \quad -20$

racines : $x_1 \simeq -4{,}64$

$x_2 \simeq -1{,}64$

$x_3 \simeq 3{,}28$

réponse :

3) Calculer la fonction dérivée

$y' = 6x^2 + 12x - 26$

4) Utiliser le résultat précédent pour dresser un tableau de variation et indiquer s'il y a un ou plusieurs extremums, préciser alors pour quelle valeur de x et la valeur de chaque extremum.

racines de y' : $x_1 \simeq -3{,}31 \quad x_2 \simeq 1{,}31$

x		−3,31		1,31	
signe de V'	+	0	−	0	+
V	↗		↘		↗

$y'(-4) = 6\times(-4)^2 + 12\times(-4) - 26 \simeq 22 > 0$

$y'(0) = 6\times 0^2 + 12\times 0 - 26 \simeq -26 < 0$

$y'(2) = 6\times 2^2 + 12\times 2 - 26 = 22 > 0$

Il y a un maximum en $x = -3{,}31$ qui vaut

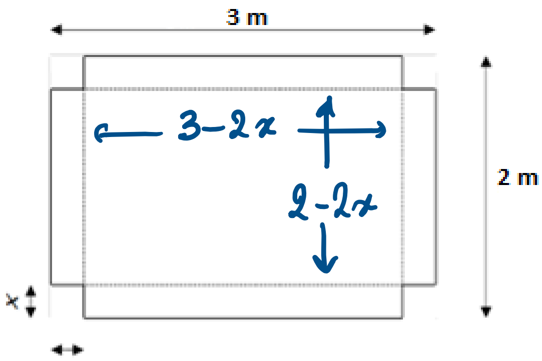
$y(-3{,}31) = 2\times(-3{,}31)^3 + 6\times(-3{,}31)^2 - 26\times(-3{,}31) - 30 \simeq 49{,}27$

Il y a un minimum en $x = 1{,}31$ qui vaut

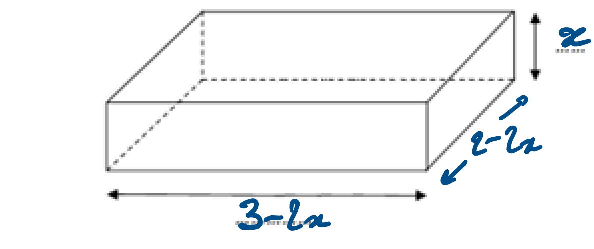
$y(1{,}31) = 2\times 1{,}31^3 + 6\times 1{,}31^2 - 26\times 1{,}31 - 30 \simeq -49{,}27$

Exercice 5 :

Pour fabriquer une boîte à partir d'une plaque rectangulaire de 3 m × 2 m, on découpe aux 4 sommets un carré de côté x.



Développement de la boîte.



Vue de la boîte en perspective cavalière.

1 – Montrer que $\boldsymbol{V = 4x^3 - 10x^2 + 6x}$

$V = x(3-2x)(2-2x)$

$V = x(6-6x-4x+4x^2) = x(4x^2-10x+6) = 4x^3-10x^2+6x$

2 – Déterminer pour quelle valeur de x le volume V sera maximum.

$V' = 12x^2 - 20x + 6$ racines de V' : $x_1 \simeq 0{,}39$ $x_2 \simeq 1{,}27$

1

x		0,39		1,27	
signe de V'	+	0	−	0	+
V	↗		↘		↗

limite possible pour la valeur de x.

$V'(0) = 12\times 0^2 - 20\times 0 + 6 = 6 > 0$

$V'(1) = 12\times 1^2 - 20\times 1 + 6 = -2 < 0$

$V'(2) = 12\times 2^2 - 20\times 2 + 6 = 14 > 0$

V maximum est atteint pour $x = 0{,}39$ et il vaut :

$V(0{,}39) = 4\times 0{,}39^3 - 10\times 0{,}39^2 + 6\times 0{,}39 \simeq 1{,}056$

Pour une hauteur de 39 cm le contenair aura un volume maximum de $1{,}056\ m^3$ donc 1056 L.